ММО-2024, 11 класс (второй день)

Задача 1. Существует ли на координатной плоскости точка, относительно которой симметричен график функции $f(x) = \dfrac{1}{2^x + 1}$? *(Д. В. Горяшин)*

Ответ: да, существует.

Решение. Покажем, что функция $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$ является нечётной. Действительно,

$$g(-x) = \frac{1}{2^{-x}+1} - \frac{1}{2} = \frac{2^x}{2^x+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^x+1} = -g(x).$$

Следовательно, график функции g симметричен относительно начала координат, а график функции f симметричен относительно точки $(0, \frac{1}{2})$.

Задача 2. Чемпионат по футболу проходил в два круга. В каждом круге каждая команда сыграла с каждой один матч (за победу даётся три очка, за ничью одно, за поражение ноль). Оказалось, что все команды вместе набрали в первом круге 60% от общей суммы всех очков за два круга. Известно также, что победитель чемпионата набрал во втором круге в 30 раз меньше очков, чем все команды вместе в первом круге. Сколько команд участвовало в турнире? *(М. А. Евдокимов)*

Ответ: 20.

Решение. Пусть в турнире участвовало n команд. Заметим, что в каждом матче две команды в сумме получают 2 или 3 очка. Значит, общее количество очков, которые могут набрать все команды в одном круге, не меньше, чем $2 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$, и не больше, чем $3 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$. Из условия следует, что все команды вместе набрали в первом круге ровно в полтора раза больше очков, чем во втором (60% всех очков в первом круге и 40% во втором). Но это возможно лишь в случае, если в первом круге все матчи закончились победой одной из команд (общая сумма очков $3 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$), а во втором — ничьей (общая сумма очков $2 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$). Значит, победитель набрал во втором круге $n-1$ очков. По условию, $30 \cdot (n-1) = 3 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$, откуда находим $n = 20$.

Задача 3. Докажите, что если при $n \in \mathbb{N}$ число $2 + 2\sqrt{12n^2+1}$ целое, то оно — точный квадрат. *(Т. А. Гарманова)*

Решение. Если число $2 + 2\sqrt{12n^2+1}$ целое при $n \in \mathbb{N}$, то оно чётное. Обозначим $2 + 2\sqrt{12n^2+1} = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\sqrt{12n^2+1} = k - 1$. Возводя это равенство в квадрат, получаем $12n^2 = k^2 - 2k$, откуда следует, что число k чётное: $k = 2m$, где $m \in \mathbb{N}$. Тогда $12n^2 = 4m^2 - 4m$, или $3n^2 = (m-1)m$.

Поскольку числа m и $m-1$ взаимно просты, следует рассмотреть два случая:

1) $m - 1 = u^2$, $m = 3v^2$, где $u, v \in \mathbb{N}$, $u \cdot v = n$;

2) $m - 1 = 3u^2$, $m = v^2$, где $u, v \in \mathbb{N}$, $u \cdot v = n$.

В первом случае имеем $3v^2 - 1 = u^2$, то есть u^2 даёт остаток 2 при делении на 3. Это невозможно, так как точный квадрат может давать при делении на 3 только остатки 0 или 1.

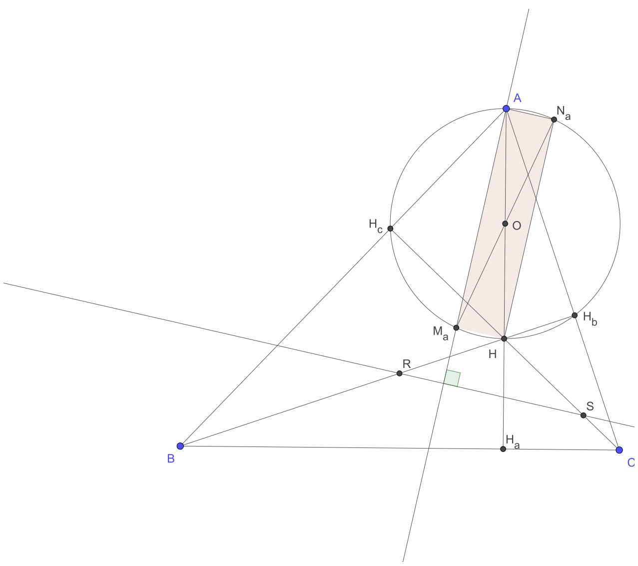
Во втором случае получаем $2 + 2\sqrt{12n^2+1} = 4m = (2v)^2$ — точный квадрат, что и требовалось доказать.

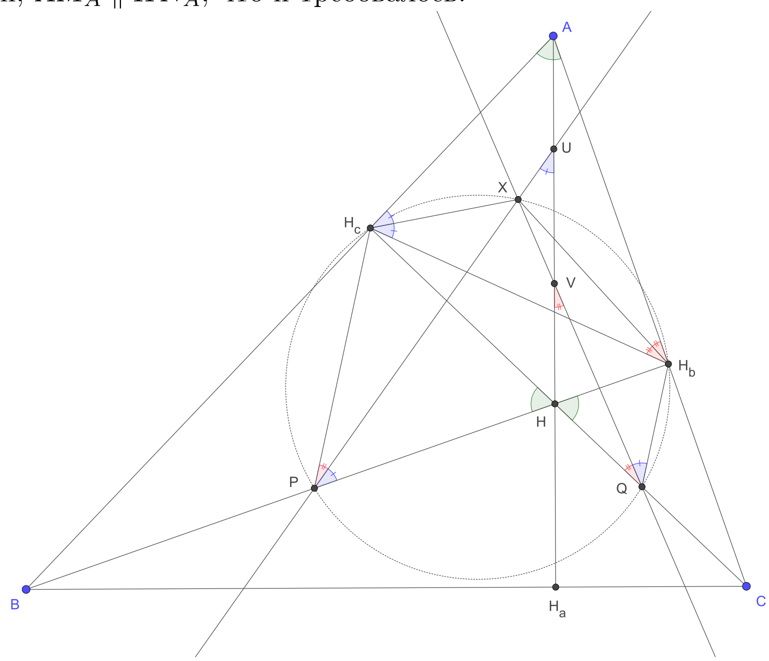
Задача 4. В остроугольном треугольнике ABC высоты AH_A, BH_B и CH_C пересекаются в точке H. Через точки, в которых окружность радиуса HH_A с центром H пересекает отрезки BH и CH, проведена прямая ℓ_A. Аналогично проведены прямые ℓ_B и ℓ_C. Докажите, что точка пересечения высот треугольника, образованного прямыми ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C, совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC. *(И. Н. Михайлов)*

Решение. Покажем, что биссектрисы треугольника ABC содержат высоты треугольника, образованного прямыми ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C. Для этого докажем, что точка пересечения прямых ℓ_B, ℓ_C лежит на биссектрисе угла $\angle BAC$, а прямая ℓ_A перпендикулярна этой биссектрисе.

1) Докажем, что прямая ℓ_A перпендикулярна биссектрисе угла $\angle BAC$.

Пусть R и S — это точки пересечения окружности с центром в H радиуса HH_A с отрезками BH и CH соответственно. Тогда треугольник RHS — равнобедренный с основанием RS, поэтому прямая RS (она же ℓ_A) перпендикулярна прямой p_A, содержащей биссектрису угла $\angle BHC$. Поэтому достаточно доказать, что прямая p_A параллельна биссектрисе угла $\angle BAC$. Пусть M_A и N_A — середины дуг $\smile H_CHH_B$ и $\smile H_BAH_C$ окружности ω_A, построенной на AH как на диаметре. Из свойств вписанных углов следует, что AM_A — биссектриса $\angle BAC$, HN_A — биссектриса $\angle H_CHH_B$. Заметим также, что M_AN_A — диаметр окружности ω_A. Значит, отрезки M_AN_A и AH пересекаются в центре окружности ω_A как её диаметры и делятся точкой пересечения пополам. То есть четырёхугольник AM_AHN_A — параллелограмм (и даже прямоугольник, поскольку его углы — вписанные, опирающиеся на диаметры окружности ω_A, то есть прямые). В частности, $AM_A \parallel HN_A$, что и требовалось.





2) Докажем, что прямые ℓ_B и ℓ_C пересекаются на биссектрисе угла $\angle BAC$.

Пусть прямые ℓ_B и ℓ_C пересекают отрезки BH, CH в точках P и Q соответственно, а точку пересечения ℓ_B и ℓ_C обозначим через X. Также обозначим углы $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$ треугольника ABC через 2α, 2β и 2γ соответственно. Поскольку $HP = HH_C$ и $HQ = HH_B$, то треугольники HH_CP и HH_BQ — равнобедренные с углами, равными $\angle H_CHB = \angle BAC = 2\alpha$, напротив оснований. Поэтому $\angle HPH_C = \angle HQH_B = 90^\circ - \alpha = \beta + \gamma$. Пусть прямые ℓ_B и ℓ_C пересекают отрезок AH в точках U и V соответственно. Тогда треугольник PUH — равнобедренный с основанием PU, значит $\angle XPH = \angle UPH = \frac{180^\circ - \angle BHA}{2} = \gamma$. Рассуждая аналогично для треугольника QVH, получаем, что $\angle XQH = \beta$. Тогда получаем

$$\angle XPH_C = \angle HPH_C - \angle HPX = \beta + \gamma - \gamma = \beta = \angle XQH_C,$$

откуда следует, что X лежит на окружности, описанной около треугольника H_CPQ. Аналогично точка X лежит на окружности, описанной около треугольника H_BPQ. Таким образом, пять точек X, H_B, P, Q, H_C лежат на одной окружности.

Тогда по свойству вписанных углов $\angle XH_BH_C = \angle XQH_C = \beta$. Четырёхугольник BH_CH_BC — вписанный, поскольку $\angle BH_CC = \angle BH_BC = 90^\circ$. Значит, $\angle H_CH_BC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 2\beta$, то есть $\angle AH_BH_C = 2\beta$. Отсюда следует, что H_BX — биссектриса угла $\angle AH_BH_C$. Аналогично H_CX — биссектриса угла $\angle AH_CH_B$. Значит, точка X является центром окружности, вписанной в треугольник AH_BH_C, в частности, лежит на биссектрисе угла $\angle BAC$.

Повторяя рассуждения пунктов 1) и 2) для двух других биссектрис треугольника ABC, получаем, что точка пересечения биссектрис треугольника ABC совпадает с точкой пересечения высот треугольника, образованного прямыми ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C, что и требовалось доказать.

Задача 5. Петя и Вася независимо друг от друга разбивают белую клетчатую доску 100×100 на произвольные группы клеток, каждая из чётного (но не обязательно все из одинакового) числа клеток, каждый — на свой набор групп. Верно ли, что после этого всегда можно покрасить по половине клеток в каждой группе из разбиения Пети в чёрный цвет так, чтобы в каждой группе из разбиения Васи было поровну чёрных и белых клеток? *(А. В. Грибалко, И. Н. Михайлов)*

Ответ: да, верно.

Решение. *Первый способ.* Для удобства назовём непересекающиеся группы клеток одного разбиения (Пети или Васи) *фигурками.*

Построим вспомогательный двудольный граф G. Для каждой из фигурок одного из разбиений (Пети или Васи) добавим в граф G новую, соответствующую этой фигурке вершину. При этом вершины, соответствующие фигуркам Пети, отнесём к первой доле, а вершины, соответствующие фигуркам Васи, — ко второй. Далее проведём рёбра между некоторыми вершинами графа G по следующему правилу: если фигурка Пети A пересекается с фигуркой Васи B по нечётному количеству клеток, то проведём между соответствующими этим фигуркам вершинами ребро.

Заметим, что в построенном графе степень каждой вершины чётна. Действительно, выберем, например, произвольную фигурку Васи A. Поскольку A состоит из чётного числа клеток и пересекается лишь с фигурками из разбиения Пети, то по нечётному количеству клеток она будет пересекаться с чётным количеством фигурок.

Рассмотрим произвольную компоненту связности G. Поскольку степень каждой вершины этой компоненты чётна, то существует цикл (т.н. *эйлеров цикл*), проходящий по всем рёбрам этой компоненты ровно по 1 разу. Выберем такие циклы для каждой компоненты связности G. Для удобства назовём полученное разбиение рёбер графа G на циклы Ω.

Теперь построим искомую раскраску фигурок в разбиении Пети. Выберем произвольный цикл σ из построенного разбиения Ω и ориентируем его рёбра в каком-то из двух возможных естественных направлений его обхода. Рассмотрим произвольное (уже ориентированное) ребро e цикла σ. Пусть оно соединяет вершины, соответствующие фигуркам A и B. По построению фигурки A и B пересекаются по нечётному количеству клеток. Пусть они пересекаются по $2k+1$ клетке. Тогда если ребро e ведёт из первой доли во вторую, то Петя покрасит произвольные k из них в чёрный цвет и произвольные $k+1$ из них в противном случае. Пусть Петя выполнит аналогичную покраску для каждой компоненты связности G. Наконец, пусть для каждой пары фигурок A и B, пересекающихся по чётному количеству клеток, Петя покрасит ровно половину клеток в их пересечении в чёрный цвет.

Докажем, что полученная покраска будет искомой. Рассмотрим, например, произвольную фигурку Пети A. Пусть B — произвольная фигурка Васи. Заметим, что среди общих клеток фигурок A и B разность числа чёрных и белых клеток равна ± 1 или 0, в зависимости от чётности числа клеток в этом пересечении. Поэтому достаточно доказать, что разность $+1$ встречается среди пересечений фигурки Пети A с фигурками Васи столько же раз, сколько и разность -1. Пусть фигурке A в графе G соответствует вершина v, которая лежит в некотором цикле σ из построенного ранее разбиения Ω. Тогда каждой разности $+1$ соответствует ребро цикла σ, входящее в v, а каждой разности -1 — ребро цикла σ, исходящее из v. Из построения цикла σ следует, что рёбер, входящих в v, в нём будет столько же, сколько и рёбер, исходящих из v. Поэтому фигурок Васи, в клетках пересечения A с которыми будет ровно на одну чёрную клетку больше, будет столько же, сколько фигурок Васи, в клетках пересечения A с которыми будет ровно на одну белую клетку больше. Таким образом, в фигурке A поровну чёрных и белых клеток, что и требовалось доказать.

Второй способ. Заметим, что частным случаем разбиений является ситуация, когда каждая из Петиных и Васиных групп содержит в точности две клетки. С другой стороны, любое разбиение на группы из четного числа клеток можно измельчить на группы из двух клеток, и если существует требуемая раскраска для измельченных разбиений, то та же самая раскраска, очевидно, решает задачу и для исходных разбиений.

Теперь каждую Васину группу (из двух клеток), совпадающую с какой-то из Петиных групп, покрасим в черный и белый цвет любым из двух способов — одну клетку в черный, другую в белый цвет.

Осталось раскрасить множество клеток, которое Васей и Петей разбито на пары так что ни одна Васина пара не совпадает с Петиной парой.

Построим граф, вершины которого соответствуют Васиным и Петиным группам (у Васи и Пети, очевидно, одно и то же количество групп). Две вершины соединим ребром тогда и только тогда, когда соответствующие группы имеют общую клетку. Тогда каждая вершина графа имеет степень два, причем любое ребро соединяет одну из вершин, соответствующих Васиным группам, с одной из вершин, соответствующих Петиным группам.

Такой граф разбивается на циклы, причем каждый цикл имеет четную длину (за счет того, что в нем чередуются вершины, соответствующие Васиным и Петиным группам) и допускает раскраску в два цвета, при которой цвета ребер чередуются вдоль цикла. Наконец, цвету клетки сопоставим цвет ребра, соединяющего две вершины графы, соответствующие Васиной и Петиной группам, пересекающимся по данной клетке. Полученная раскраска удовлетворяет условию задачи.